A. Funcional. Doble Grado I. Inform. y Matem.

Convocatoria ordinaria, 12/01/2022

2 puntos

① Sea $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ un espacio normado de dimensión infinita. Prueba que existe alguna aplicación $L: \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, lineal y no continua.

2

② Proporciona dos ejemplos de espacios normados, de dimensión infinita, con base (algebraica) numerable, especificando la base.

1

③ Enuncia el Teorema de representación de Riesz-Fréchet sobre el dual topológico de un espacio de Hilbert.

④ Considera el espacio prehilbertiano $H = (c_{00}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, donde $\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$, $\forall (x_n), (y_n) \in H$

2

a) Demuestra que el operador lineal $L: H \to \mathbb{R}$, definido como $L((x_n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{n}$, es continuo.

2

b) Demuestra que no existe $z \in H$, t.q.

$$L((x_n)) = \langle z, (x_n) \rangle, \quad \forall (x_n) \in H$$

1

c) Si comparas el resultado del apartado b) anterior con el Teorema enunciado en el ejercicio ③, ¿qué conclusión obtienes? Razona la respuesta.